

# CIV Concours d'entrée 2019

## Mathématiques

Durée: 3 heures



Numéro d'inscription du candidat :

### Consignes pour les candidats

- Inscrivez ci-dessus votre numéro d'inscription.
- N'ouvrez pas ce sujet jusqu'à ce que l'on vous en donne l'autorisation.
- Les calculatrices ou formulaires ne sont pas autorisés.
- Vos réponses doivent être écrites en **français ou en anglais** sur les feuilles de réponses fournies.
- N'oubliez pas de renseigner votre numéro d'inscription et de numéroter correctement (page .. sur ..) sur chacune de vos feuilles de réponses (par exemple : page 1/5, 2/5 ... 5/5).
- Une réponse partielle est toujours intéressante. N'hésitez pas à écrire un raisonnement, même incomplet.
- Une suggestion de barème est indiquée en début de chaque exercice. Nous vous conseillons d'en tenir compte dans le temps que vous consacrerez à chaque exercice.
- Pour information, le barème suggéré maximum total est de 100 points.

Les notations utilisées dans ce document sont classiques : par exemple  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs,  $\mathbb{R}$  l'ensemble des réels,  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes,  $i$  est le nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$  et  $\frac{df}{dx}$  ou  $f'(x)$  est la dérivée d'une fonction  $f$  relativement à la variable  $x$ .

BONNE CHANCE / GOOD LUCK !

### 1. [5 points maximum]

Sachant que  $\cos(2\theta) = \frac{1}{9}$ , exprimer  $\cos \theta$  sous la forme  $\pm \frac{\sqrt{a}}{b}$ , avec  $a, b \in \mathbb{N}$ .

### 2. [10 points maximum]

1. Trouver  $z \in \mathbb{C}$  tel que :  $|z + 3i| = 3|z|$ .
2. Trouver  $z \in \mathbb{C}$  tel que :  $\bar{z} = i(z - 1)$ .

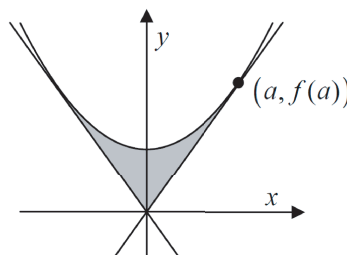
### 3. [7 points maximum]

1. Vérifier que  $\frac{1}{\sqrt{r+1}-\sqrt{r}} = \sqrt{r+1} + \sqrt{r}$ , pour  $r \geq 0$ .
2. Que vaut  $\sum_{r=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{r+1} + \sqrt{r}}$  ?

### 4. [8 points maximum]

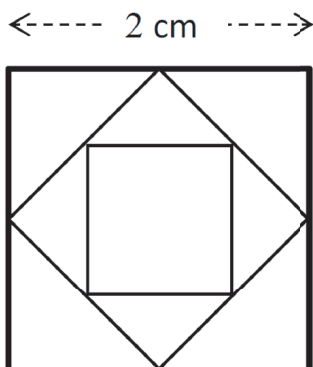
Soit  $c$  une constante positive et  $f$  l'application définie par  $f(x) = x^2 + c$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Soit  $a > 0$  tel que la tangente à la courbe  $y = f(x)$  au point  $(a, f(a))$  passe par l'origine. Exprimer  $a$  en fonction de  $c$ .
2. La tangente au point  $(-a, f(-a))$  passe alors aussi par l'origine. Déterminer en fonction de  $c$ , l'aire du domaine délimité par ces deux tangentes et la courbe.



### 5. [15 points maximum]

Un carré a ses côtés de longueur 2cm. On joint les milieux des côtés de ce carré pour former un autre carré et l'on itère ce procédé. Les trois premiers carrés de ce processus sont dessinés ci-dessous.



Trouver la somme des longueurs des périmètres de ces carrés si l'on suppose que l'on répète ce procédé à l'infini. La réponse sera donnée sous la forme  $a + b\sqrt{c}$  cm, avec  $a, b$  et  $c \in \mathbb{N}$ .

## 6. [12 points maximum]

Luc est un client internet de la banque CivB (la banque du Civ). Afin d'accéder à son compte en ligne, la banque CivB lui a fourni un mot de passe unique de six chiffres. Le mot de passe est composé de chiffres compris entre 0 et 9, les chiffres pouvant être répétés. Par exemple, la combinaison suivante est un mot de passe valide :

1. Combien y a-t-il de mots de passe possibles ?
2. (a) Combien de mots de passe ne contiennent **aucun** zéro ?  
(b) En supposant que la distribution des mots de passe soit uniforme, quelle est la probabilité qu'un mot de passe contienne au moins un zéro ?
3. A chaque fois que Luc veut accéder à son compte bancaire en ligne, le site web de CivB lui demande de remplir trois des chiffres de son mot de passe dans des cases choisies aléatoirement. Par exemple, on peut lui demander de renseigner le 1<sup>er</sup>, 4<sup>ième</sup> et 5<sup>ième</sup> chiffre, comme ci-dessous :

\*  \*    \*

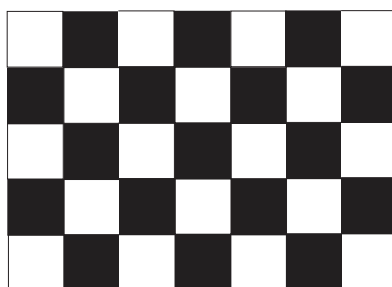
Quel est le nombre de façons qu'a CivB de choisir les trois cases à compléter ?

## 7. [23 points maximum]

1. Trouver la valeur minimale de  $x^x$  pour  $x$  un réel positif.
2. Si  $x$  et  $y$  sont des réels positifs, montrer que  $x^y + y^x > 1$ .

## 8. [20 points maximum]

Peut-on recouvrir un damier  $5 \times 7$  par des L (c'est-à-dire l'objet construit à partir d'un carré  $2 \times 2$  auquel on a enlevé un de ses quatre  $1 \times 1$  coins), sans déborder, en plusieurs couches de sorte à ce que chaque case du damier soit recouverte du même nombre de L ?



BONNE CHANCE / GOOD LUCK !